模块三 空间向量及其应用

第 1 节 空间向量的基本运算（★☆）

内容提要

本节为预备小节，主要熟悉空间向量的概念和运算规则，大量内容和平面向量类似，此处不一一罗列了，仅梳理一些常用的考点.

1．设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则：

①加减法：$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3)$；

②数乘：$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$；

③共线：若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则存在唯一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，即 $\begin{cases}a_1=\lambda b_1\\a_2=\lambda b_2\\a_3=\lambda b_3\end{cases}$；

④模：$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$；

⑤数量积：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；

⑥夹角余弦公式：$\cos<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$；

⑦两点连线向量的坐标公式：设 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$；

⑧投影向量计算公式：向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a}$.

2．共面向量定理：设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 是空间中不共线的两个向量，则空间中的向量 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在实数 x，y，使得 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

3．四点共面系数和结论：设 A，B，C 是平面 α 上不共线的三点，O 是平面 α 外一点，则对于空间中任意一点 D，设 $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，则 D 在平面 α 内 $\Leftrightarrow x+y+z=1$.

4．法向量的计算步骤：

①求出平面 α 内的两个不共线的向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$；

②设法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，并由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ 建立关于 x，y，z 的三元一次方程组；

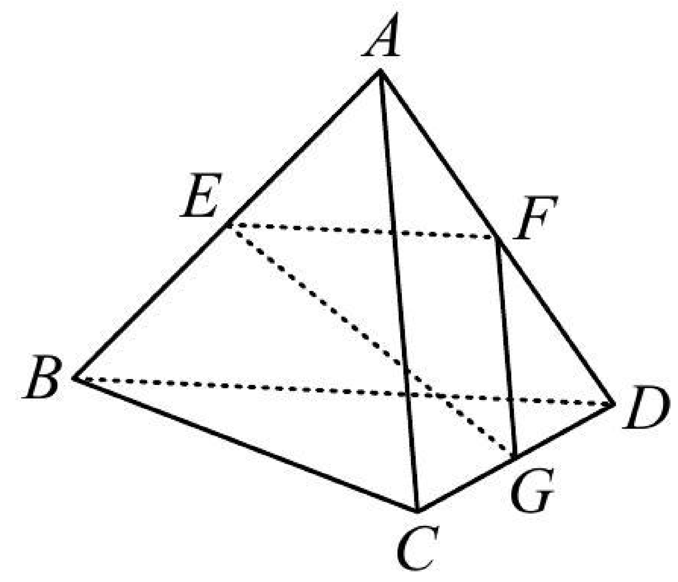
③对其中一个变量赋值，求出另外两个变量，即可得到平面 α 的一个法向量.

典型例题

类型Ⅰ：空间向量的运算

【例 1】（多选）如图，已知四面体 $ABCD$ 所有棱长均为 2，E，F，G 分别为棱 AB，AD，DC 的中点，则下列说法正确的有（　　）

（A）$\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 不共面　（B）$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EB}$　（C）$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2$　（D）$\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{FG}$



解析： A 项，向量可以平移，空间中任意两个向量都可平移到同一平面上去，故 A 项错误；

B 项，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$，故 B 项正确；

C 项，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC=2\times2\times\cos60^\circ=2$，故 C 项正确；

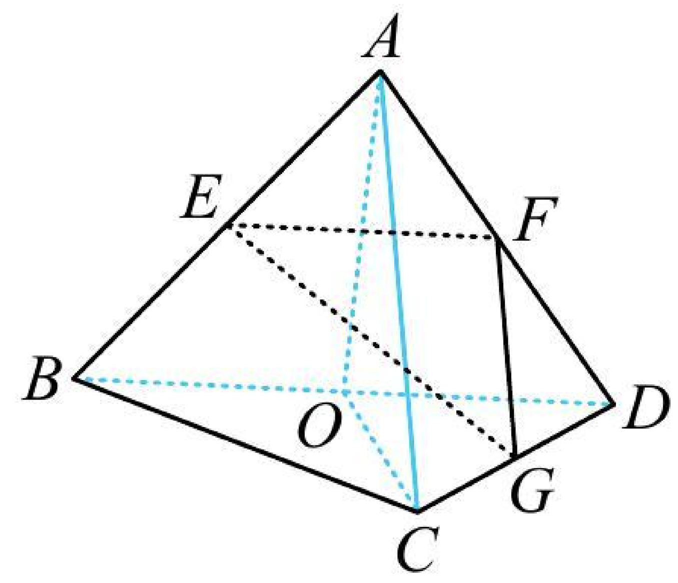
D 项，若熟悉正三棱锥对棱垂直的结论，则可快速判断，这一性质前面小节已有提及，下面先证明，

如图，取 BD 中点 O，连接 OA，OC，则 $BD\perp OA$，$BD\perp OC$，所以 $BD\perp$ 平面 AOC，故 $BD\perp AC$，

接下来做本题就简单了，显然 EF，FG 都可利用中位线性质转到对棱，

又 $EF/\!/BD$，$FG/\!/AC$，所以 $EF\perp FG$，从而 $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{FG}$，故 D 项正确.

答案： BCD



【例 2】（多选）已知空间向量 $\boldsymbol{a}=(-2,-1,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,4,5)$，则下列结论正确的是（　　）

（A）$(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{a}$　　（B）$5|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|$　　（C）$\boldsymbol{a}\perp(5\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})$　　（D）$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $-\dfrac{1}{10}\boldsymbol{b}$

解析： A 项，由题意，$2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(-4,-2,2)+(3,4,5)=(-1,2,7)$，观察发现不存在实数 λ，使得 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，所以 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 不平行，故 A 项错误；

B 项，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3^2+4^2+5^2}=5\sqrt{2}$，所以 $5|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{b}|=5\sqrt{6}$，故 B 项正确；

C 项，$\boldsymbol{a}\cdot(5\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})=5\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5\times(\sqrt{6})^2+4\times[(-2)\times3+(-1)\times4+1\times5]=10\neq0$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $5\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ 不垂直，故 C 项错误；

D 项，代内容提要第 1 点的公式⑧即可，$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=\dfrac{-5}{(5\sqrt{2})^2}\boldsymbol{b}=-\dfrac{1}{10}\boldsymbol{b}$，故 D 项正确.

答案： BD

【总结】 可以发现，空间向量不管是图形规则，还是坐标运算，都与平面向量类似.

类型Ⅱ：共面与基底的判定

【例 3】已知 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一个基底，若 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{p}=3\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，且 $\{\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}\}$ 不能构成空间的基底，则实数 x 的值为_____.

解析： 不能构成基底，说明共面. 可发现 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 不共线，故 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 共面等价于 $\boldsymbol{p}$ 能用 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 表示，设 $\boldsymbol{p}=\lambda\boldsymbol{m}+\mu\boldsymbol{n}$，则 $3\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})+\mu(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，整理得：$3\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(\mu-2\lambda)\boldsymbol{b}+\mu\boldsymbol{c}$，

所以 $\begin{cases}3=\lambda+\mu\\ x=\mu-2\lambda\\ 1=\mu\end{cases}$，解得：$x=-3$.

答案： -3

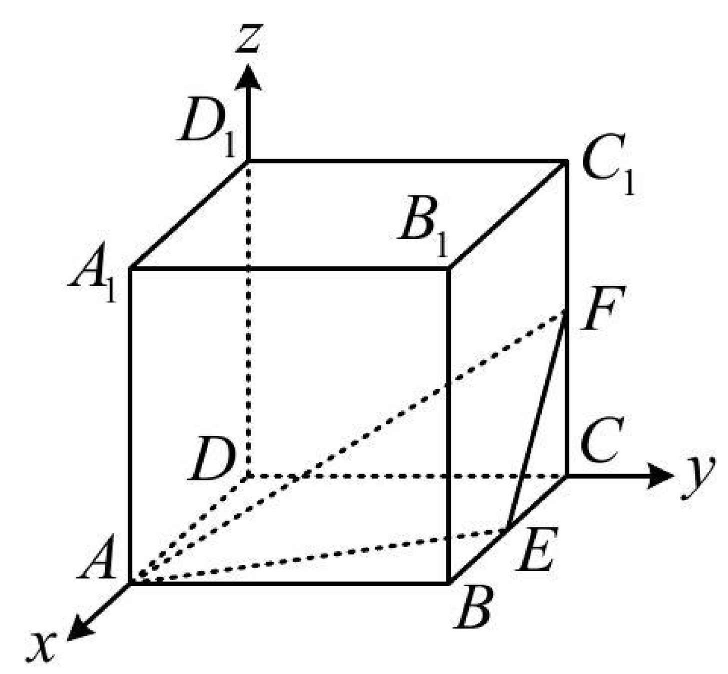
【反思】①空间中判断三个向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{p}$（其中 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 不共线）是否共面，就看是否存在实数 x,y 使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{m}+y\boldsymbol{n}$；②三个向量是否能作为空间的基底也是据此判定，只要三个向量不共面，就可以作为基底.

类型Ⅲ：简单建系运算与法向量求法

【例 4】（多选）在如图所示的空间直角坐标系中，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正方体，E，F 分别为 BC，CC_1 的中点，则（　　）

（A）$A_1C\perp AB_1$　　（B）A_1B 与 AD_1 所成的角为 60°

（C）$DD_1\perp AF$　　（D）平面 AEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(4,2,4)$



解析： A 项，判断两直线是否垂直，只需看它们的方向向量数量积是否为 0，

不妨设 $AB=2$，则 $A_1(2,0,2)$，$C(0,2,0)$，$A(2,0,0)$，$B_1(2,2,2)$，所以 $\overrightarrow{A_1C}=(-2,2,-2)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2)$，

因为 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AB_1}=-2\times0+2\times2+(-2)\times2=0$，所以 $A_1C\perp AB_1$，故 A 项正确；

B 项，求线线角，可用两直线的方向向量算夹角余弦，$B(2,2,0)$，$D_1(0,0,2)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,2,-2)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-2,0,2)$，

所以 $\left|\cos<\overrightarrow{A_1B},\overrightarrow{AD_1}>\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{AD_1}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1B}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD_1}\right|}=\dfrac{4}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，从而 A_1B 与 AD_1 所成的角为 60°，故 B 项正确；

C 项，$F(0,2,1)$，$\overrightarrow{DD_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{AF}=(-2,2,1)$，所以 $\overrightarrow{DD_1}\cdot\overrightarrow{AF}=2\neq0\Rightarrow DD_1$ 与 AF 不垂直，故 C 项错误；

D 项，$E(1,2,0)$，$\overrightarrow{AE}=(-1,2,0)$，设平面 AEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=-x+2y=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=-2x+2y+z=0\end{cases}$，

此方程组有无数组解，任取一组非零解，都可以得到法向量，故对其中一个变量赋值，求另外两个，

令 $x=2$ 可得 $y=1$，$z=2$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,1,2)$ 是平面 AEF 的一个法向量，与 $\boldsymbol{n}$ 共线的非零向量都是法向量，

而 $\boldsymbol{m}=(4,2,4)=2\boldsymbol{n}$，所以 $\boldsymbol{m}$ 也是平面 AEF 的法向量，故 D 项正确.

答案： ABD

【反思】求法向量是流程化的步骤，务必熟悉，且为了计算方便，宜把法向量调整为不含分数的形式.

强化训练

1.（2023 • 乐山模拟 • ★）在四面体 $ABCD$ 中，E，F 分别为 BC，AD 的中点，若 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{EF}=$（　　）

（A）$\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$　（B）$\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$　（C）$\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$　（D）$-\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

2.（2023 • 河南模拟 • ★）已知空间向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$，$\boldsymbol{b}=(1,-2,1)$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$_____；向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量是_____.

3.（2023 • 信宜模拟 • ★★）已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,4,-2)$，$\boldsymbol{c}=(1,5,x)$，若 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 共面，则实数 $x=$（　　）

（A）3　（B）2　（C）15　（D）5

4.（2023 • 四川绵阳模拟 • ★★）已知 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 是空间的一组基底，则下列各项中能构成基底的一组向量是（　　）

（A）$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　（B）$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　（C）$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　（D）$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$

5.（2023 • 饶平模拟 • ★★）（多选）已知空间中三点 $A(0,1,0)$，$B(2,2,0)$，$C(-1,3,1)$，则下列说法正确的是（　　）

（A） $AB \perp AC$

（B）与 $\overrightarrow{AB}$ 同向的单位向量是 $(\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5},0)$

（C） $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角余弦值是 $\frac{\sqrt{55}}{11}$

（D）平面 ABC 的一个法向量是 $(1,-2,5)$